Probabilités sur un univers fini

Table des matières

1 Evénements

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1 : *Expérience aléatoire*

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont le résultat n'est pas prévisible de façon certaine. Un **événement** est une affirmation sur le résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple 1. *Le lancer d'un dé à 6 faces constitue une expérience aléatoire : il existe 6 résultats possibles dont aucun n'est prévisible de façon certaine. On peut considérer l'événement "la face qui apparaît est paire".*

Exemple 2. *Le tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes constitue une expérience aléatoire. On peut considérer l'événement "la carte tirée est la dame de cœur".*

Remarque 1.2 : *Evénement impossible, événement certain*

Un événement qui ne se réalisera jamais est appelé **événement impossible**. Un événement qui se réalise toujours est appelé **événement certain**.

Exemple 3. *On lance un dé à 6 faces. L'événement "la face qui apparaît est 7" est un événement impossible.*

1.2 Modélisation mathématique

Définition 1.3 : *Univers*

On appelle **univers** d'une expérience aléatoire, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. Un résultat de l'expérience est ainsi un élément ω de l'ensemble Ω. Seul l'un d'entre eux est observé à l'issue de l'expérience.

Exemple 4. *Les résultats d'un lancer de dé à 6 faces peuvent être modélisés par l'ensemble* $[\![1, 6]\!]$.

Exemple 5. *Les résultats du tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes peuvent être modélisés par l'ensemble* $[\![1, 4]\!] \times [\![1, 13]\!]$.

Définition 1.4 : *Evénement*

Un **événement** est une partie A de Ω : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Exemple 6. *On lance un dé à 6 faces. L'événement "la face qui apparaît est paire" est modélisé par* $\{2, 4, 6\}$.

Remarque 1.5 : *Vocabulaire des événements*

- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'un seul élément.
- L'événement A implique l'événement B si et seulement si $A \subset B$.
- L'**événement contraire** à A est $\overline{A}$.
- L'événement *"les événements A <u>et</u> B sont réalisés"* est représenté par $A \cap B$.
- L'événement *"l'un des deux événements A <u>ou</u> B est réalisé"* est représenté par $A \cup B$.
- Si $A \cap B = \varnothing$, A et B ne peuvent arriver en même temps. Ils sont dits **incompatibles**.

Exemple 7. *On lance un dé à 6 faces. Soientt A l'événement "la face qui apparaît est paire" et B l'événement "la face qui apparaît est divisible par 3". On a alors*

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \text{et} \quad B = \{3, 6\}.$$

De plus, $A \cap B$ est l'événement "la face qui apparaît est paire et divisible par 3".

$$A \cap B = \{6\}$$

Définition 1.6 : *Système complet d'événements*

Une famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements est un **système complet d'événements** si cette famille forme une partition de Ω.

Exemple 8. *On lance un dé à 6 faces, $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Les événements $A_1 = \{2, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6\}$ et $A_3 = \{3\}$ forment un système complet d'événements.*

2 Probabilités finies

On suppose pour le reste du chapitre que Ω est fini.

2.1 Définitions

Définition 2.1 : *Probabilité*

On appelle **probabilité** sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui vérifie

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple 9. *On lance un dé à 6 faces, $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On définit pour tout $\omega \in \Omega$,*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}.$$

*Lorsque la probabilité est uniforme comme dans cet exemple, on parle d'**équiprobabilité**.*

Remarque 2.2 : *Calcul de la probabilité d'un événement*

$\mathbb{P}(A)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent l'événement A.

Exemple 10. *On lance un dé équilibré à 6 faces. Soit A l'événement "la face qui apparaît est paire". Puisque $A = \{2, 4, 6\}$, alors*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Propriété 2.3 : *Probabilité*

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie

(i) Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(iii) Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Démonstration. (i) On a une partition de $\Omega = A \cup \overline{A}$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$

(ii) On applique (i) à $A = \Omega$.

(iii) Comme $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$. Ces événements sont incompatibles donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$$

□

Propriété 2.4 : *Famille d'événements deux à deux incompatibles*

Pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration. La démonstration se fait facilement par récurrence. L'étape d'hérédité donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right).$$

Or, d'après la définition 2.1 d'une probabilité, on a pour une union disjointe

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

□

En particulier, si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = 1.$$

Exemple 11. *On lance un dé truqué à 6 faces dont la probabilité d'obtenir le numéro k est $\frac{k}{21}$. On note A_k l'événement "obtenir le numéro k". Ces six événements sont deux à deux incompatibles. La probabilité d'obtenir un numéro impair est alors*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_3 \cup A_5) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_5) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

Théorème 2.5 : *Formule des probabilités totales - première version*

Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \cap B\right).$$

Démonstration. On cherche une partition de B :

$$B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap B\right).$$

Comme $A_1 \cap B$, …, $A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles, d'après la propriété 2.4,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap B\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \cap B\right).$$

□

Exemple 12. *Un restaurateur propose une formule laissant à ses clients l'un des quatre choix suivants :*

— *Evénement A : "entrée/plat"*

— *Evénement B : "entrée/plat/dessert"*

— *Evénement C : "plat/dessert"*

— *Evénement D : "uniquement le plat"*

Une étude statistique préalable a révélé que les pourcentages de clients faisant ces choix sont respectivement 31%, 35%, 23% et 11%. Quelle est la probabilité qu'un client prenne une entrée ?

On note l'événement E : "le client prend une entrée". La famille (A, B, C, D) est un système complet d'événements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap A) + \mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(E \cap C) + \mathbb{P}(E \cap D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) = \frac{31}{100} + \frac{35}{100} = \frac{66}{100}.$$

2.2 Formules du crible

Théorème 2.6 : *Formule du crible (ou de Poincaré) pour deux événements*

Soient A et B deux événements. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Théorème 2.7 : *Formule du crible pour trois événements*

Soient A, B et C trois événements. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Les démonstrations de ces formules du crible sont similaires à celles vues pour les cardinaux dans le chapitre Ensembles et applications.

2.3 Exemple fondamental : l'équiprobabilité

Définition 2.8 : *Equiprobabilité*

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont **équiprobables** si :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ est **uniforme** si tous les singletons d'éléments de Ω sont équiprobables :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\}).$$

On est en situation d'équiprobabilité lorsque chaque résultat a la même chance d'être obtenu.

Exemple 13. *Pour un lancer de dé équilibré à 6 faces, on suppose que les chances que le dé tombe sur une face sont les mêmes pour les 6 faces.*

Propriété 2.9 : *Formule de l'équiprobabilité*

Si $\mathbb{P}$ une probabilité uniforme, alors pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les $\{\omega\}$ pour $\omega \in \Omega$ forment une partition de Ω. On en déduit

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

□

2.4 Conditionnement

2.4.1 Probabilité conditionnelle

Définition 2.10 : *Probabilité conditionnelle*

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de B sachant A** le réel

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On peut définir une application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ B & \mapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array}$$

On peut montrer que l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ permet de modéliser une situation pour laquelle l'évènement aléatoire associé à A s'est produit de manière certaine.

Exemple 14. *On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité que la somme des résultats vaille 6 sachant que le premier dé a donné 1 ?*

Solution.

2.4.2 Formule des probabilités composées

Théorème 2.11 : *Formule des probabilités composées*

Soient A_1, A_2, …, A_n des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. À démontrer en exercice par récurrence. □

Exemple 15. *Une urne contient initialement* 7 *boules noires et* 3 *boules blanches. On tire successivement* 3 *boules : si on tire une noire, on l'enlève ; si on tire une blanche, on la retire ; et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer* 3 *boules blanches à la suite ?*

Solution.

2.4.3 Formule de Bayes

Théorème 2.12 : *Formule de Bayes*

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle,

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Démonstration. La définition de la probabilité conditionnelle donne

$$\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B).$$

Ce qui permet de conclure. □

2.4.4 Formule des probabilités totales

Théorème 2.13 : *Formule des probabilités totales - seconde version*

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle. Alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B).$$

Démonstration. On reprend la première version de la formule des probabilités totales (théorème 2.5). On conclut en remarquant que pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B).$$

□

Exemple 16. *On dispose d'un test de dépistage d'une maladie.*
En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100%.
Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 *fois sur* 100.
Mais 4 *fois sur* 1000 *il est positif sur une personne non malade.*
Environ 0.2% *de la population est atteinte de la maladie.*
Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

Solution.

2.5 Indépendance

2.5.1 Indépendance deux à deux

Définition 2.14 : *Indépendance pour deux événements*

Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.

Exemple 17. *On lance un dé bleu, puis un dé rouge, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, et les événements :*

- *"la face du dé bleu est paire" est modélisé par $A = \{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*
- *"la face du dé rouge est impaire" est modélisé par $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}$.*

L'événement "la face du dé bleu est paire et la face du dé rouge est impaire" est modélisé par

$$A \cap B = (\{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \cap (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}) = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}.$$

Comme $\mathbb{P}(A) = \dfrac{3 \times 6}{6^2}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6 \times 3}{6^2}$, on a bien

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \times 3}{6^2} = \frac{9}{36} = \frac{3 \times 6}{6^2}\,\frac{6 \times 3}{6^2} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Les deux événements sont bien indépendants.

Propriété 2.15 : *Critère d'indépendance*

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

Démonstration. Il suffit de diviser de chaque côté par $\mathbb{P}(A)$ dans la définition de l'indépendance pour obtenir le résultat. □

Propriété 2.16 : *Indépendance deux à deux*

Si deux événements A et B sont indépendants, alors

- $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants,
- A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Définition 2.17 : *Indépendance deux à deux*

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. On dit que ces événements sont **deux à deux indépendants** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right)\,\mathbb{P}\left(A_j\right).$$

Si A, B et C sont deux à deux indépendants alors on ne peut rien dire quant à A et $B \cap C$ ou A et $B \cup C$.

Exemple 18. *On lance deux dés à 6 faces, un rouge et un noir. On considère les événements suivants :*
A="La somme des faces est 7",
B="Le dé rouge amène un 2",
C="Le dé noir amène un 5".
On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6},$$

De plus, $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ correspondent tous à "le dé rouge amène un 2 et le dé noir amène un 5".

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36},$$

A, B et C sont deux à deux indépendants. Cependant,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cap C)\,.$$

Ainsi A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants.
On remarque que pour $B \cup C$ = "le dé rouge amène un 2 ou le dé noir amène un 5", il y a 11 possibilités : on ne compte pas deux fois le cas où le dé rouge vaut 2 et le dé noir 5.

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{11}{36}$$

Cependant,

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cup C)\,.$$

Ainsi A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

2.5.2 Indépendance mutuelle

Définition 2.18 : *Indépendance mutuelle*

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour toute partie finie J de $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

Exemple 19. *Soient A, B et C trois événements. Ils sont :*

- *mutuellement indépendants si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

- *indépendants deux à deux si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Propriété 2.19 : *Indépendance mutuelle implique indépendance deux à deux*

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

Exemple 20. *On lance deux fois une pièce de monnaie. On considère les événements suivants :*
A="On obtient pile au 1er lancer",
B="On obtient face au 2ème lancer",
C="On obtient la même chose aux 2 lancers".
On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2},$$

De plus,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Cependant,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

Les événements A, B et C sont donc deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Propriété 2.20 : *Indépendance mutuelle*

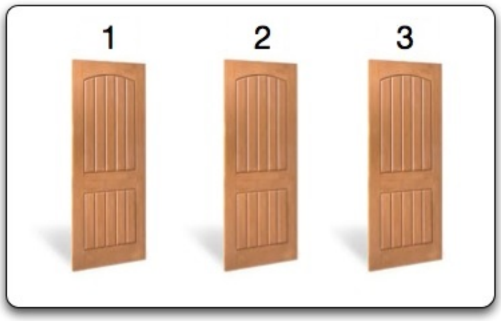
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants, alors il en est de même pour des événements $B_1, \ldots, B_n$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$B_k = A_k \text{ ou } B_k = \overline{A_k}.$$

Annexe : Problème de Monty Hall

Exemple 21. *Lors d'un jeu télévisé américain des années 60, Let's Make a Deal ! , le présentateur Monty Hall montrait trois portes fermées au candidat et affirmait que derrière l'une d'entre-elles se cachait un cadeau (une voiture) et qu'il suffisait d'indiquer la bonne porte pour gagner.*

(i) Le candidat choisit une des 3 portes.



Pour l'instant on n'ouvre pas cette porte.

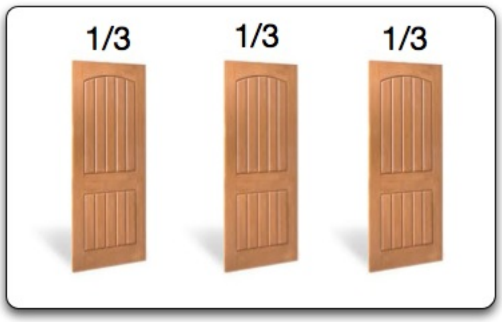
(ii) Ensuite le présentateur ouvre l'une des deux portes qui n'a pas été choisie et qui ne cache pas la voiture. Précisons qu'en fait, le présentateur sait où est cachée la voiture. Il ouvre donc une porte "perdante".

(iii) Le candidat a le choix entre maintenir son premier choix ou le changer pour l'autre porte.

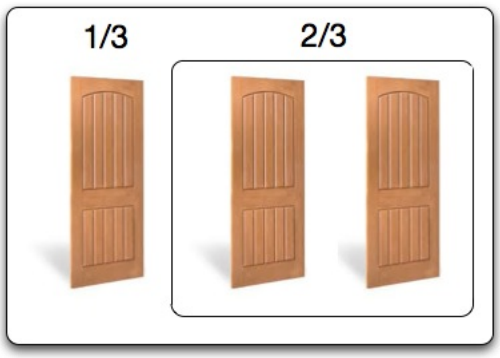
Disons que nous choisissons la porte 1 *et que le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière les portes, ouvre une autre porte, disons la 3, révélant une chèvre. Il nous demande alors : "Voulez-vous choisir la porte* 2 *?". Est-ce à notre avantage de changer notre choix ?*

Explication rapide

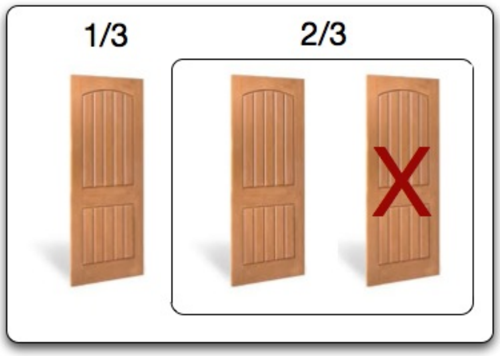
(i) Au début, chaque porte a la même probabilité d'être gagnante, soit une chance sur 3.



Nous choisissions la porte 1, la voiture a une chance sur trois d'être derrière la porte 1 et donc deux chances sur trois d'être parmi les deux portes qui restent.



(ii) Parmi les deux portes qui restent, le présentateur ouvre une mauvaise.



(iii) Maintenant c'est assez simple. La voiture a :

- une chance sur trois d'être derrière la porte choisie au début,
- deux chances sur trois d'être derrière la porte restante.

Il faut donc changer de choix de porte.

Démonstration mathématique

Nous avons choisi la porte 1 (le raisonnement serait identique dans les deux autres cas). Notons les événements :
G_i "la voiture se trouve derrière la porte i"
O_i "l'animateur ouvre la porte perdante i"

L'animateur ouvre la porte 3 (le raisonnement est le même s'il avait ouvert la porte 2). Déterminons la probabilité de gagner en changeant notre choix.

Solution.

Contrairement à ce que l'on peut penser, il faut bien changer et choisir la porte 2. La difficulté d'appréhension de la solution provient du fait qu'il faut comprendre que l'action du présentateur est totalement dépendante du choix initial.